

# VALIDACIÓN DE TEORÍAS ANALÍTICAS ESTUDIADAS EN ESTRUCTURAS AEROESPACIALES CON PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS

N. Leon <sup>a</sup>, N. A. Leon <sup>a</sup> y L. Giuliano <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Centro Tecnológico Aeroespacial (CTA) – Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de La Plata, Calle 116 e/ 47 y 48, CP 1900, La Plata, Argentina  
Email: neyder.leon@ing.unlp.edu.ar

## RESUMEN

*Validar teorías es común para garantizar la seguridad en la industria aeroespacial. La validación se puede hacer comparando la teoría analítica con simulaciones de elementos finitos, identificando discrepancias y mejorando la precisión. Se realizó un modelo de elementos finitos para validar la variación de flujo de corte entre costillas macizas y con agujeros, variando su relación. Además, se verificó la teoría analítica de estructuras semimonocasco en un cajón alar mediante elementos finitos. El objetivo principal del trabajo es comparar algunas teorías de estructuras aeroespaciales con modelos de elementos finitos equivalente, esto implica investigar la mejor forma de representar dichas estructuras en un programa de elementos finitos. Y analizar el nivel de precisión que tienen estas teorías analíticas usadas en cálculos preliminares las cuales omiten la naturaleza hiperestática de la estructura. Los casos seleccionados no tienen aplicación real, sino que se utilizan para ilustrar la metodología aplicada y el nivel de error estimativo que se puede encontrar.*

**Palabras clave:** ELEMENTOS FINITOS, ESTRUCTURAS, VALIDACION.

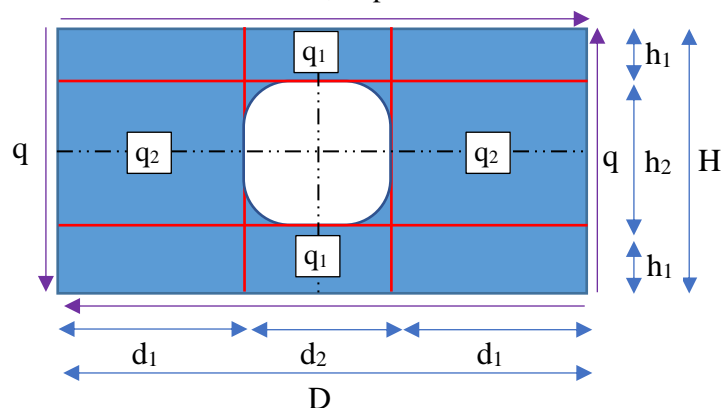
## INTRODUCCIÓN

Se realizará un breve desarrollo de las teorías analíticas que fundamentaron las validaciones en cuestión. El enfoque principal recaerá en la descripción de los modelos y métodos que fueron implementados. Se expondrán los resultados obtenidos en comparación con los valores analíticos de referencia, detallando los errores porcentuales que surgieron. Además, se llevará a cabo una discusión acerca de las posibles causas subyacentes a dichos errores.

## METODOLOGÍA

### COSTILLA

La teoría de flujo de corte aplicada a costillas, tanto macizas como perforadas, se expone en la referencia [2]. Este aborda la teoría de los flujos medios, proporcionando así valores de referencia según la discretización realizada en cada sección. A continuación, se presenta una síntesis de la teoría aplicada.



**Figura 1.** Esquema de flujos medios sobre la costilla

Respecto al esquema presentado en la **Figura 1** se discretiza las zonas para obtener el flujo de corte medio, estos flujos de corte serán obtenidos cortando la estructura que se encuentra en equilibrio y planteando un nuevo equilibrio de esta zona cortada, los cortes planteados para este caso se marcan por la línea negra punteada. De cada corte se obtuvo.

$$q_1 = q \cdot \frac{H}{2 \cdot h_1} \quad (1)$$

$$q_2 = q \cdot \frac{D}{2 \cdot d_1} \quad (2)$$

El modelo de la costilla se basa en una estructura tipo "Shell" (es decir, chapa en inglés), asumiendo que el espesor es comparativamente pequeño en relación con las dimensiones generales del modelo. Para validar la variación del flujo en la costilla perforada, mediante el uso la ecuacion (3), se realizará una validación inicial en una costilla cuadrada con lados de longitud L y un agujero de radio r notablemente más pequeño, donde  $r \ll L$ . Si bien esta costilla no es relevante para una aplicación real, servirá para verificar la correcta aplicación del modelo, al compararla con la variación analítica de las tensiones de corte y el flujo medio presentados previamente. Posteriormente, se analizará una costilla rectangular con un ancho B y una altura H, incorporando dos agujeros equidistantes con dimensiones R. Se comenzará con tamaños de agujeros donde  $R \ll H$  y se plantearan varios valores de R para determinar hasta qué punto se mantiene la concordancia analítica. También se identificara cuándo la teoría de flujos medios ya no es válida y la variación analítica deja de cumplirse.

A continuación, se muestran las geometrías descritas anteriormente y sus condiciones de borde (CB).

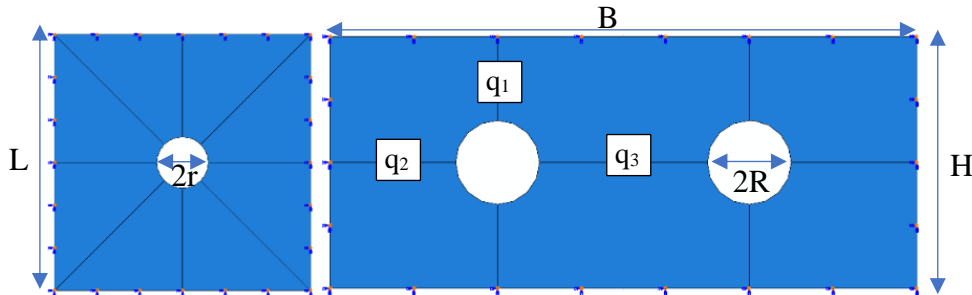


Figura 2. Geometría y CB de las costillas planteadas

Se limito los movimientos fuera del plano sobre el contorno externo para asegurar que la solución numérica estuviera contenida en un dominio 2D. En ambos casos se aplicó un estado corte puro (flechas rosadas en la Figura 3). Este estado de cargas esta en equilibrio por este motivo no seria necesario aplicar una condicion de borde al sistema, aun asi un analisis estatico usando de elementos finitos se basa en resolver la matriz rigidez del sistema y al no tener condicion de borde se genera una singularidad. El "inertia relief" (flechas verdes en la Figura 3) resuelve este problema sin generar una concentracion de tensiones. Ya que reparte este equilibrio numerico con pequeñas contribuciones en todo el cuerpo.

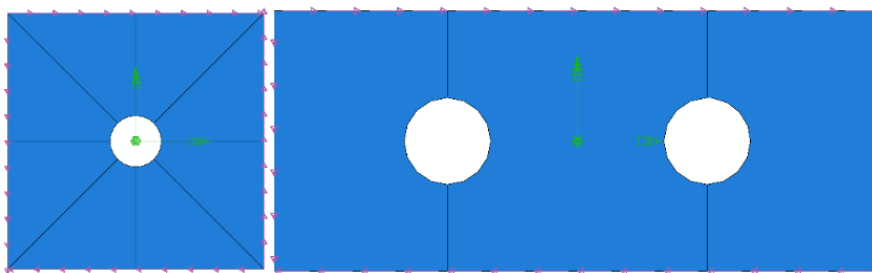


Figura 3. Carga aplicada sobre las costillas

La variación analítica del flujo de corte en la geometría de la costilla de lados L y radio r se baso en la información desarrollada en [4]. Si bien no se aborda exactamente el problema de una chapa sometida a corte si lo hacen para una tracción constante (S). Es posible vincular ambas soluciones usando las propiedades del círculo de mohr ( $q/t = S/2$ ) y  $(\theta = \theta' + \pi/4)$ , debido a que el agujero se considera relativamente pequeño respecto a las dimensiones de la chapa, se puede hacer un cambio en el origen de cordenas rotando la chapa  $45^\circ$ , en ese caso la tracción pasa a ser un esfuerzo cortante. En la fórmula (3) el origen de coordenadas está ubicado en el centro del agujero y  $\theta = 0$  esta alineado con la horizontal, a es el radio del agujero y r la componente del sistema coordenado.

$$\sigma_{r\theta} = \frac{q}{t} \left( 1 + 2 \cdot \frac{a^2}{r^2} - 3 \cdot \frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta) \quad (3)$$

**CAJON ALAR**

La teoría analítica sobre el comportamiento de un cajón alar idealizado se aborda en la referencia [3]. Esta teoría trata sobre los flujos medios en las chapas de una estructura semimonocasco. Sin embargo, tiene sus limitaciones. En casos donde la forma de la estructura no tiene variación de altura, el flujo de corte no cambia entre los largueros/cordones ni entre las costillas. También, las chapas deben ser mucho más delgadas que las dimensiones de los largueros. Las ecuaciones (4) y (5) resumen su aplicación para el caso específico abordado. Siendo  $q_i$  es flujo de corte i-esimo,  $\frac{\Delta S_i}{a}$  la variación del esfuerzo axial sobre el cordón i-esimo y  $A_{\blacksquare i}$  el área barrida por el flujo respecto del punto donde se está tomando momento.

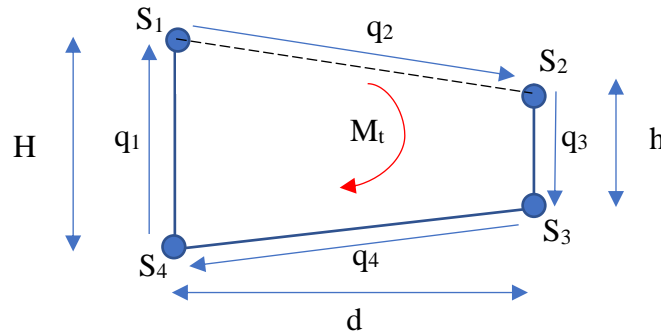
$$q_{i+1} = q_i + \frac{\Delta S_i}{a} \quad (4)$$

$$M_t = \Sigma 2 \cdot A_{\blacksquare i} \cdot q_i \quad (5)$$

Estas dos ecuaciones resuelven cualquier cajón alar cerrado monocelda, como la carga aplicada es un momento torsor los  $\frac{\Delta S_i}{a} = 0$  y los  $q_i = q_{\text{cerrado}}$ . De la ecuación (6) se halla el flujo cortante del cajón. Donde  $A_m$  es el área media encerrada por las chapas.

$$q_{\text{cerrado}} = \frac{M_t}{2 \cdot A_m} \quad (6)$$

El cajón alar abierto seguirá la convención mostrada en la **Figura 4**.



**Figura 4.** Esquema de cajón abierto

$$q_1 = \frac{M_t}{d \cdot h} ; q_3 = \frac{M_t}{d \cdot H} ; q_4 = 0 \quad (7)$$

Producto de la flexión diferencial de las chapas 1 y 3, se cargan los cordones aledaños axialmente, el valor absoluto de esta carga se muestra en la ecuación (8), este comportamiento se obtiene por la simetría de la estructura.

$$|s_{i-1,i}| = q_i \cdot \frac{l}{2} \quad (8)$$

La carga sobre los cordones hace que exista una variación del esfuerzo sobre cada cordón cercano al agujero, según la teoría analítica este esfuerzo se disipa en una estación. Por ende, la variación del esfuerzo se puede calcular como se presenta en la ecuación (9) y para resolver el estado tensional que aparece por esta discontinuidad en los módulos adyacentes se aplica la ecuación (4) y (5). Los estados de carga resultantes sobre los cajones contiguos al que le falta la chapa es una superposición de los estados de carga del cajón cerrado con los que surgen producto de la discontinuidad.

$$\frac{\Delta S_i}{a} = \frac{S_i}{l} \quad (9)$$

Para validar los resultados del Método de Elementos Finitos (FEM), se consideraron dos escenarios con un momento torsor. Estos casos están diseñados para simplificar al máximo el proceso de validación. Ambos se centran en un ala con forma de cajón cerrado, compuesta por 4 largueros, 4 chapas y 9 costillas. El segundo escenario involucra un cajón alar al que le falta una chapa, simulando un compartimento de mantenimiento. Esto permite analizar cómo las cargas por flexión diferencial afectan a la estructura. En los módulos del centro, se analizarán los resultados de ambos casos, se excluyen los cajones extremos donde se aplica la carga y se establece la condición de borde del modelo. Esta exclusión se basa en el principio de Saint-Venant, que sostiene que las concentraciones de tensiones

generadas por estas restricciones desaparecen a distancias suficientemente lejanas de su área de aplicación. Se debe tener presente que el objetivo es validar el modelo con la teoría analítica que esta derivada de un modelo lineal que omite dichas concentraciones.

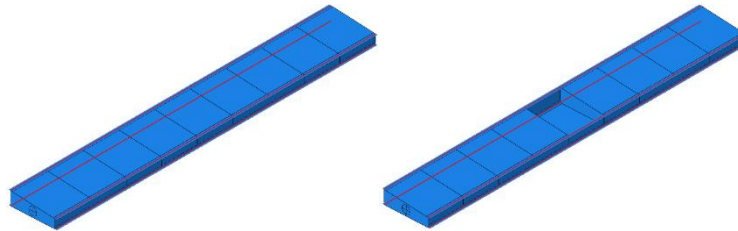


Figura 5. Geometría de los cajones alares

Las condiciones de borde y el estado de carga se mostrarán solo para el cajón cerrado para no hacer más extenso el desarrollo. En ambos casos la carga y el apoyo se realizó en un punto y se propago en una región circular arbitraria sobre las costillas externas. Las líneas rojas que se muestran en la Figura 5 corresponde a los cordones, estos se modelaron con elementos “Beam” (es decir, viga en inglés) y todas las chapas se modelaron como elemento “Shell”. El momento se muestra con la flecha magenta en la Figura 6 y el empotramiento se encuentra en el extremo opuesto. Las condiciones de borde y de carga se muestran sobre una vista cortada de la estructura para presentar ambas en una sola figura.

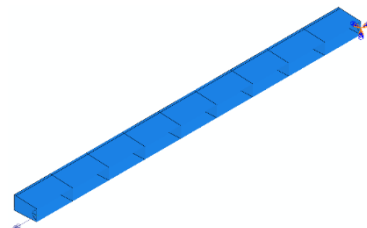


Figura 6. CB de los cajones alares

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### COSTILLA

Para validar la teoría se realiza el modelo de una costilla cuadrada perforada con un radio (r) de 10 mm y lados con longitud de 200 mm; tomando las condiciones de borde y carga mostradas en la Figura 2 y 3, con un valor de flujo cortante de 1 N/mm; se obtiene el grafico del contorno para el esfuerzo cortante en la costilla del FEM y los resultados dados para la ecuación (3) ejecutados en Matlab, estos se presentan en la Figura 7. Los resultados corresponden a los flujos de corte en coordenadas polares.

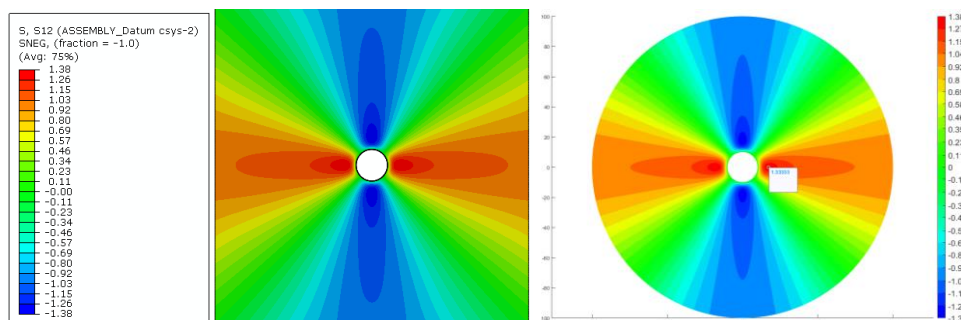


Figura 7. Contorno del esfuerzo cortante en la costilla un agujero [N/mm]

Comparando los valores específicamente para el ángulo de  $0^\circ$  entre el borde interno del agujero y el externo de la chapa en la Figura 8, el FEM e ideal (de ahora en mas cuando se hable de conceptos ideales se hace referencia a lo que se obtiene cuando se usa la ecuacion (3)), se corresponden en gran medida tanto en los valores máximos con un valor de 1.38 N/mm y 1.33 N/mm respectivamente con un 3% de error, aun asi la forma de las dos curvas es bastante similar; teóricamente el flujo medio obtenido de la ecuación (2) es de 1.111 N/mm, el promedio obtenido por FEM para esta sección es de 1.128 N/mm el error es de 1.5 %.

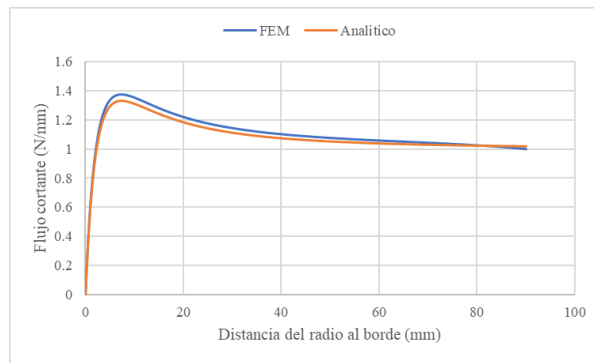


Figura 8. Gráfico flujo cortante para  $\theta = 0^\circ$

Para la validación de **flujos medios** (teoría usada en el diseño preliminar de estructuras) se evaluó una chapa arbitraria de dimensiones  $H=30$  mm,  $B=70$  mm y espesor de 1 mm, con distintos radios de agujero ( $R$ ), que van de 1 mm a 10 mm (ver Figura 2). Estas chapas se sometieron a un flujo de corte unitario. Se muestra los flujos absolutos obtenidos en FEM a fin de evaluar su forma y valor medio. Para esto se evaluó la forma parametrizada del flujo, normalizando cada flujo en función a su valor máximo y se parametrizando la distancia al borde del agujero relativa al radio del agujero, con el objetivo de poder compararla de forma directa con el flujo ideal (línea negra punteada en la figura 9 y 11).

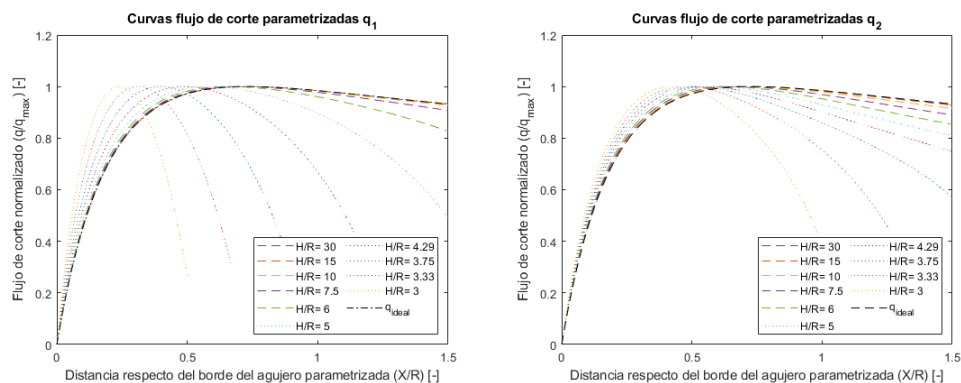


Figura 9. Flujos  $q_1$  y  $q_2$  parametrizados.

De la **Figura 9**, se puede observar que las curvas que mejor se ajustan a la curva ideal son para relaciones  $H/R$  superiores a 7.5, se concluye solo a partir del flujo  $q_1$  y  $q_2$ , porque el flujo  $q_3$  está influenciado por dos agujeros y esto no se tiene en cuenta en las hipótesis desarrolladas en la ecuación (3). Cabe destacar que se ven flujos de corte distintos de cero en el borde del agujero para los resultados FEM esto se debe al error numérico asociado al tamaño de la malla. Una malla extremadamente fina como la presentada en la **Figura 7** disminuye este error numérico, igualmente para un análisis de forma y de flujos medios este pequeño error es despreciable ya que como se ve en la **Figura 7** esta tensión aumenta con una gran pendiente en esa zona cercana al agujero. En la **Figura 10** se observan los resultados para  $q_3$ .

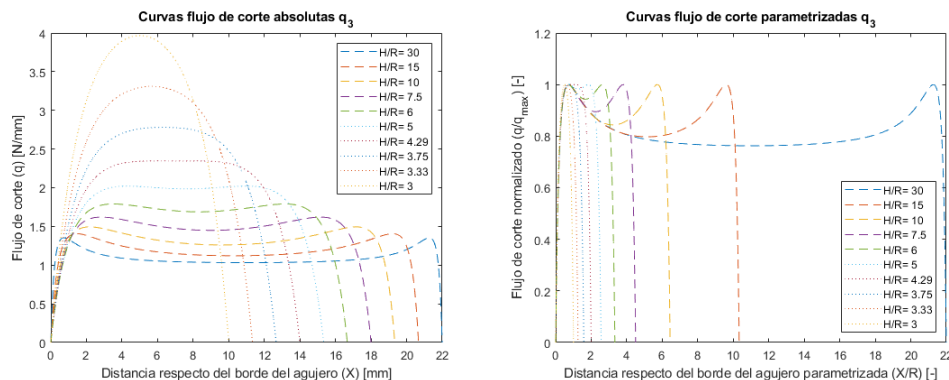
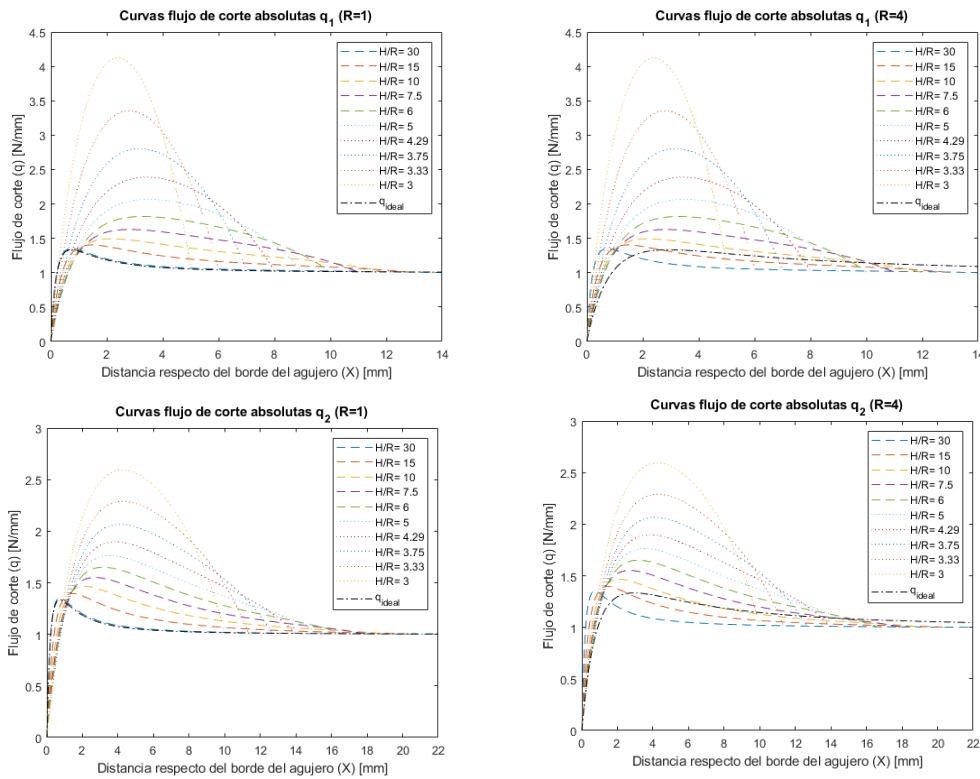


Figura 10. Flujos  $q_3$  absoluto y parametrizado

En la **Figura 11** se puede ver los resultados absolutos para  $q_1$  y  $q_2$ , superpuestos a la curva ideal para un radio R de 1 mm y 4 mm. Se puede apreciar la gran similitud con el radio menor ( $H/R=30$ ), el radio mayor de 4 se compara con la relación  $H/R$  de 7.5, en este caso ambas curvas solo respetan la forma, esto guarda coherencia con lo analizado en la Figura 9.



**Figura 11.** Flujos  $q_1$  y  $q_2$  absoluto

En la tabla 1 se muestra los flujos medios obtenidos con los resultados de FEM para cada R y los obtenidos de forma teorica usando ecuaciones analogas a las presentadas en (1) y (2).

**Tabla 1.** Resultados flujos medios

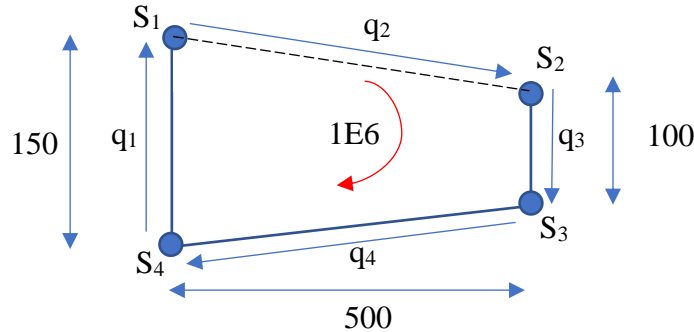
Resultados [N/mm]	Teoría			FEM			Error		
	q1	q2	q3	q1	q2	q3	q1	q2	q3
H/R=30	1.07	1.05	1.09	1.07	1.05	1.09	0.02%	0.02%	0.01%
H/R=15	1.15	1.10	1.19	1.15	1.10	1.19	0.04%	0.07%	0.03%
H/R=10	1.25	1.16	1.31	1.25	1.16	1.31	0.05%	0.12%	0.11%
H/R=7.5	1.36	1.22	1.44	1.36	1.22	1.44	0.05%	0.19%	0.19%
H/R=6	1.50	1.30	1.60	1.50	1.30	1.60	0.05%	0.26%	0.26%
H/R=5	1.67	1.39	1.78	1.67	1.40	1.78	0.05%	0.33%	0.35%
H/R=4.3	1.88	1.50	2.00	1.88	1.51	1.99	0.03%	0.37%	0.39%
H/R=3.7	2.14	1.63	2.26	2.14	1.64	2.25	0.01%	0.41%	0.42%
H/R=3.3	2.50	1.79	2.59	2.50	1.80	2.58	0.05%	0.40%	0.44%
H/R=3	3.00	2.00	3.00	3.00	2.01	2.99	0.15%	0.36%	0.38%

La teoría de flujos medios, presentada en las ecuaciones (1) y (2), y los resultados de FEM son coherentes, como se muestra en la tabla 1. La discrepancia obtenida en las curvas de flujo entre los flujos ideales y los resultados de FEM se debe al equilibrio de fuerzas. En la ecuación (3), se evalúa una chapa de dimensiones infinitas con un radio de agujero finito, resultando en un valor máximo constante de 1.33 N/mm, variando solo la ubicación del máximo según el radio del agujero; cuando las dimensiones del agujero aumentan respecto a las dimensiones de la chapa, las hipótesis sobre las que se basa el desarrollo del flujo ideal se vuelven inválidas, causando la discrepancia mencionada anteriormente.



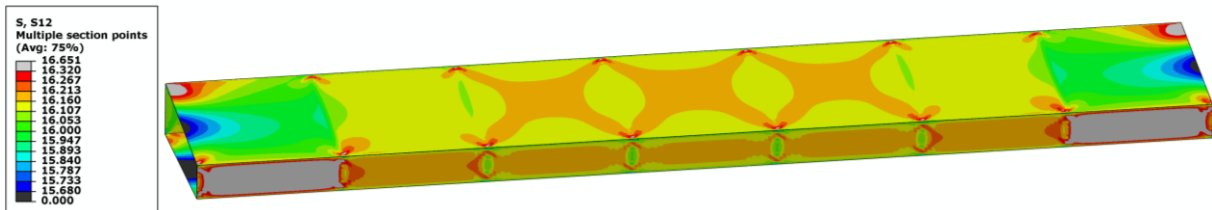
**CAJON ALAR**

Para el análisis del cajón alar se usan las dimensiones (mm) y cargas mostradas (N\*mm) en la **Figura 12**, la línea negra punteada representa el cajón abierto en el módulo medio, el área media transversal ( $A_m$ ) del flujo es de 62500 mm<sup>2</sup>, la longitud (l) entre costillas es de 400 mm y un espesor de la chapa (t) de 0.5 mm.

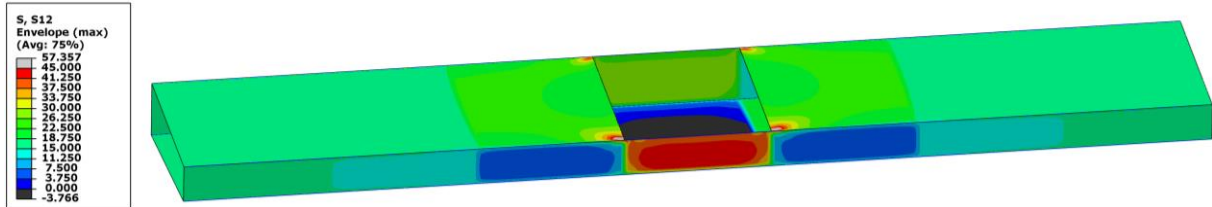


**Figura 12.** Dimensiones del cajón

Se muestran los resultados del FEM para el cajón cerrado y abierto en las **Figuras 13 y 14**; los resultados se muestran en la tabla 2 como flujo cortante; para trasladar lo obtenido en el modelo FEM se toma promedio de los esfuerzos cortantes en la cara analizada y se multiplican por el espesor de la chapa; para la teoría se remplazan los valores en las ecuaciones y se soluciona el equilibrio del flujo.

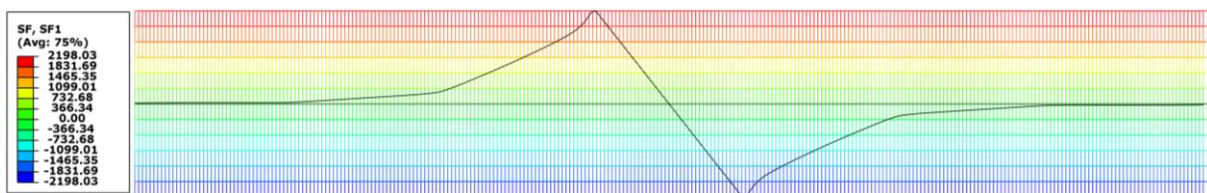


**Figura 13.** Resultados cajon cerrado FEM para tensiones de corte [Mpa]



**Figura 14.** Resultados cajon abierto FEM para tensiones de corte [Mpa]

Los resultados de S1 y S2 teóricos tienen un valor máximo mayor al obtenido por el modelo FEM, debido a que la fuerza se propaga hasta el segundo módulo adyacente, la caída de fuerza en el primer módulo es de un 13% del valor máximo; teniendo en cuenta lo presentado en la ecuación (9) el valor debería ser igual a cero, por lo que se obtienen porcentajes de error mayores para este el módulo abierto de 15%; considerando lo mencionado se calcula la energía para los delta S1 y S2 para generar una coherencia con las hipótesis planteadas, con errores de 2.7% y 1.1% respectivamente.



**Figura 15.** Resultados FEM para S1 [N]

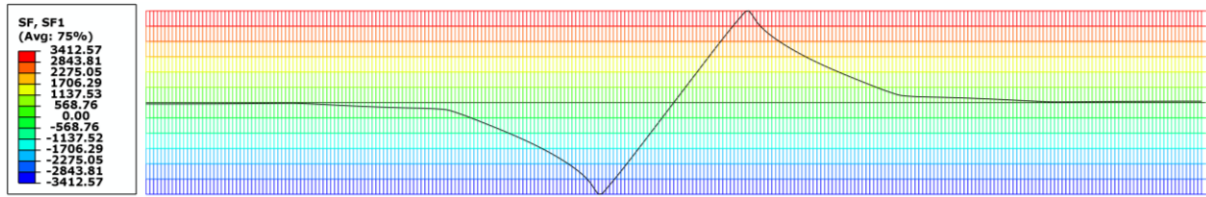


Figura 16. Resultados FEM para S2 [N]

Tabla 2. Resultados cajón alar.

Resultados	Teoría			FEM			Error		
	Cerrado	Abierto	Adyacente	Cerrado	Abierto	Adyacente	Cerrado	Abierto	Adyacente
q1 [N/mm]	8	13.33	5.33	8.12	13.47	5.54	1.50%	0.70%	1.75%
q2 [N/mm]	8	-	12	8.11	-	11.21	1.37%	-	6.58%
q3 [N/mm]	8	20	2	8.12	20.91	2.47	1.50%	4.55%	3.92%
q4 [N/mm]	8	0	12	8.11	1.35	11.23	1.37%	6.75%	6.42%
S1 [N]	0	2666.66	0	-	2198.03	287.75	-	11.72%	-
S2 [N]	0	-4000	0	-	-3412.57	-272.76	-	14.69%	-
S3 [N]	0	4000	0	-	3412.57	272.76	-	14.69%	-
S4 [N]	0	-2666.66	0	-	-2198.03	-287.75	-	11.72%	-
Energía ΔS1	-	533.33 J		-	554.70 J		-	2.67%	
Energía ΔS2	-	-800.00 J		-	-791.62 J		-	1.05%	

### CONCLUSIONES

Se detectaron errores relativamente pequeños en ambas validaciones propuestas, todos ellos por debajo del 10%. Estos niveles de error se consideran aceptables en el contexto de un desarrollo analítico centrado en el análisis de un diseño preliminar.

La variación del flujo de corte causado por la presencia de un agujero se puede obtener punto por punto utilizando la función descrita en la ecuación (3) cuando la relación H/R es mayor a 7,5. Para relaciones más bajas, la forma se asemeja más a una campana simétrica.

Incluso en casos de relaciones H/R muy bajas, la teoría de flujos medios puede aplicarse, y el error encontrado para H/R igual a 3 es menor al 0.5%, lo cual se considera un error aceptable.

En la Figura 13, se observa que la mayoría de la estructura del cajón cerrado se encuentra dentro de una tolerancia inferior al 2% en comparación con el valor teórico esperado. Los flujos de corte para el cajón abierto se ajustan satisfactoriamente a la teoría analítica presentada, incluso a pesar de las diferencias encontradas en los esfuerzos de los largueros. Se verificó el error en la energía acumulada en los largueros mediante el análisis FEM y la teoría analítica, y se encontró un error inferior al 3%, lo que justifica la discrepancia en el valor máximo teórico esperado para el esfuerzo en cada larguero, ya que el esfuerzo que se suponía se disipaba en un módulo se está disipando en dos módulos. Los flujos sobre los cajones adyacentes se encontraban muy cerca del valor esperado, lo que, valida la teoría analítica propuesta, con un error inferior al 7%.

### REFERENCIAS

1. BRUHN, E. F. Analysis and design of flight vehicle structures, tri-state offset company. 1973.
2. NIU, Michael Chun-Yung. Airframe stress analysis and sizing. 1997.
3. MEGSON, Thomas Henry Gordon. Aircraft structures for engineering students. Butterworth-Heinemann, 2016.
4. TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. Theory of Elasticity” McGraw-Hill Book Company. Inc. New York, 1951. Pag. 94, Ec. (62)